

А. В. Жуков

ВЕЗДЕСУЩЕЕ

ЧИСЛО

π



URSS



**Александр Владимирович
ЖУКОВ**

Кандидат технических наук, автор нескольких научно-популярных книг по математике и программированию, в числе которых — энциклопедия для детей «Математика» (в соавт., 1998), «Изучаем Delphi» (2000), «Элегантная математика: Задачи и решения» (в соавт., URSS, 2005), а также множества научно-популярных статей в журналах «Квант», «Домашний лицей», «Математика для школьников». С 1998 года ведущий рубрики для младших школьников в физико-математическом журнале для школьников и студентов «Квант». Преподаватель Московского детского клуба «Компьютер».

А. В. Жуков

ВЕЗДЕСУЩЕЕ ЧИСЛО π

Издание стереотипное



URSS
МОСКВА

Жуков Александр Владимирович

Вездесущее число «пи». Изд. стереотип.

М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2017. — 240 с.

В настоящей книге, написанной живым, образным языком, собраны различные сведения о числе «пи» — знаменитой математической константе, появляющейся в самых неожиданных местах. Эта книга — своеобразная «маленькая энциклопедия» числа «пи». Основная ее часть имеет познавательный и занимательный характер, в ней излагаются сведения, доступные широкому кругу любителей математики. В дополнительной части книги, занимающей второй план повествования и адресованной «математическим гурманам», приводятся решения и ответы к задачам, сформулированным в основной части, а также справочные данные и комментарии, не выходящие за пределы стандартного курса высшей математики в вузе.

Книга будет полезна студентам и преподавателям математических вузов, а также всем любителям математики.

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»», 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
 Формат 60х90/16. Печ. л. 15.
 Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД», 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-05686-1

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ»,
 2009, 2017

20379 ID 221968



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или перепечатана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Содержание

Предисловие к пятому изданию	8
Введение	9
О структуре книги	10
Глава 1. Краткая «биография» числа π	11
1. Кто придумал число π ?	11
2. Все окружности похожи	12
3. Преданья старины глубокой	13
Между Тигром и Ефратом	15
На древних берегах Нила	16
Число π в древнем библейском тексте	17
Индия: «Правила веревки»	17
Наивный период в истории числа π	19
4. Что такое длина окружности?	19
Конструкция Антифона	20
Парадоксы бесконечности	21
Идея Бризона	23
Математический аккомпанемент	25
5. По стопам Архимеда	25
«Архимедово» число	25
«Измерение круга»	27
Математический аккомпанемент	28
Длина окружности и площадь круга	29
Математический аккомпанемент	29
6. Эра вписанных и описанных многоугольников	32
Математический аккомпанемент	33
7. «Крепкий орешек»: задача о квадратуре круга	33
Предыстория задачи	33
Луночки Гиппократа	34
Математический аккомпанемент	35
Невольное разрушение канона	35
Квадратура Динострата	36
Математический аккомпанемент	37
Спираль Архимеда	38
Математический аккомпанемент	38

Квадратурные страсти	38
<i>Математический аккомпанемент</i>	41
8. Дальнейшее постижение числа π	41
Рационально ли число π ?	41
Цепные дроби	42
π — число иррациональное	44
9. Эра математического анализа	45
Случайность или закономерность?	45
Ряды Мадхавы	46
<i>Математический аккомпанемент</i>	46
Воодушевление арктангенсом	47
<i>Математический аккомпанемент</i>	49
Азарт набирает силу	50
10. Невозможность квадратуры круга	51
Тесный мир циркуля и линейки	51
<i>Математический аккомпанемент</i>	52
Мир алгебраических чисел	54
Число e	54
<i>Математический аккомпанемент</i>	56
π — число трансцендентное	57
11. Новая эра: на арену соревнований выходят компьютеры	59
Планка рекордов взмывает ввысь	59
Схемы сверхбыстрого умножения	60
Формула Дэвида и Грегори Чудновски	61
Алгоритм Юджина Саламина и Ричарда Brenta	61
Сверхэффективный алгоритм Джонатана и Питера Борвейнов	62
Гений Рамануджана	63
Продолжение марафона	65
Планета — компьютер	66
Как вычислять отдельные цифры числа π ?	67
<i>Математический аккомпанемент</i>	69
12. Нерешенные проблемы	70
Нормально ли число π ?	70
Мера иррациональности π	72
<i>Математический аккомпанемент</i>	73
Предположение Григория Гальперина	74
Романтическая гипотеза	75

Глава 2. На просторах геометрии	76
1. Житейская история	76
<i>Математический аккомпанемент</i>	77
2. Коза, блины и планеты	78
3. Узаконенные неравенства	79
4. «Мисс покрывка»	80
5. Бочки, бублики и другие тела вращения	82
<i>Математический аккомпанемент</i>	83
6. Как запугать читателя куриным яйцом	84
7. Число π и третья проблема Пильберта	86
<i>Математический аккомпанемент</i>	87
8. π в Многомерии	90
<i>Математический аккомпанемент</i>	92
9. Квадратура доктора Шарадека	94
10. Неевклидовы, но геометрии	94
Злоключения пятого постулата	95
Геометрия великанов	97
Фантастика? — Нет, геометрия	99
Всегда ли $\pi = 3,14 \dots$?	101
11. Существуют ли объекты размерности π ?	104
12. Венок задач	108
<i>Математический аккомпанемент</i>	112
Глава 3. В мире чисел	112
1. π в коллективе целых чисел	114
<i>Математический аккомпанемент</i>	114
2. π -ичная система счисления	115
3. Предпочтительные числа и приближение числа π	116
<i>Математический аккомпанемент</i>	116
4. Числа π и e	118
<i>Математический аккомпанемент</i>	119
5. Числа π и e — объекты искусства	120
6. π помогает вычислять факториалы	122
7. Удивительное решето	123
8. Число π и «золотое сечение»	125
9. Ускользающая загадка «золотой спирали»	129
10. Спираль из квадратных корней и число π	130
11. π и число «счастливых» билетов	132
<i>Математический аккомпанемент</i>	134
12. Классические средние и число π	136
<i>Математический аккомпанемент</i>	

13. Красота — в формулах любящих	138
Композиции Ариабхаты	139
Математический аккомпанемент	140
Произведение Виета	141
Математический аккомпанемент	141
Формула Валлиса	143
Конструкция Броункера и дроби Эйлера	143
Математический аккомпанемент	144
π и числа Фибоначчи	144
Математический аккомпанемент	145
«Генераторы» красивых разложений	146
Ряды Тейлора	146
Ряды Фурье	148
Математический аккомпанемент	149
Формулы Эйлера	150
Синус как многочлен бесконечной степени	150
Математический аккомпанемент	151
«Букет» разложений	152
Математический аккомпанемент	153
Формула + формула = формула	157
Преобразование ряда в произведение	157
Умножим, поделим	158
Преобразование произведения в ряд	159
Леонард Эйлер	161
Экспонаты «музея изящной математики»	161
Сюрпризы функции $\text{sinc}(x)$	163
14. Как π от больших вычислений спасает	164
Математический аккомпанемент	167
15. Фарей и свойства дробей	167
Экзаменационные козни	168
16. Вязочка задач	170
Математический аккомпанемент	171
17. Случайные встречи	173
Задача Бюффона	173
Математический аккомпанемент	175
Бросать можно не только иголку...	176
И даже не обязательно что-то бросать	177
π и псевдослучайные числа	178
Случайные блуждания	179
Математический аккомпанемент	180
Под знаком π	181
Математический аккомпанемент	183

Глава 4. Число π и наука о природе 185

1. π -теорема	186
Математический аккомпанемент	186
2. «Закон сохранения» π	187
3. π и физические константы	190
4. Почему $\pi^2 \approx g$?	191
5. π и модель падающего бутерброда	192
6. Динамическая бильiardная система Г. А. Гальперина	193
7. Эх вы сани, мои сани...	194
8. Крутится-вертится, хочет... нырнуть	195
9. Какое небо голубое!	197
10. Освещенность и число π	198
11. π и теория относительности	198
Математический аккомпанемент	200
12. Внеземные цивилизации и число π	200
13. π и ритмы Вселенной	201

Глава 5. Такое разное π 203

1. π -человек	203
2. Человек-циркуль	204
3. Серебряное сечение и «Медный всадник»	205
4. π -эзия	206
5. Стисываем у Сергея Федина	208
Число π	208
Акрологос	209
6. «Пи» пишем — π в уме	209
7. π -шарады	210
8. Три спички Лейба Штейнгарца	210
9. Пик π	211
10. Вот и знаю я число, именуемое π	213
11. Вокруг да около π	214
12. День числа π	217
13. π в сети Интернет	218
14. «Портреты» числа π	220
15. π позирует компьютеру	223
16. Размыкая круг	224
17. Число π и дуализм «хаос — гармония»	228
18. Всеобъемлющая книга о числе π	228

Предисловие к пятому изданию

Иррациональность Бога в том, что он
не три-един, как все думают, а π -един.

[Фед], с. 192

Предыдущие издания книги «Вездесущее число π » вызвали положительные отклики у читателей. Мне посчастливилось убедиться в справедливости шуточного «закона транзитивности π »: «Если A является другом π , а π является другом B , то A и B — друзья», и даже — что удивительно: «Всякие A и B , которые дружат друг с другом, по-дружески относятся и к числу π ».

Советы и предложения многих моих старых и новых друзей учтены при подготовке данного издания. Не имея возможности упомянуть всех, перечислю тех, кто внес наиболее существенный вклад: И. Ф. Акулич (Минск), Н. С. Астапов (Новосибирск), К. И. Бахтияров (Москва), Т. Б. Бонч-Осмоловская (Сидней, Австралия), Г. А. Гальперин (Чарлстон, США), Б. С. Горобец (Москва), С. В. Дворянинов (Москва), В. Б. Дроздов (Рязань), А. А. Елизаров (Великие Луки), И. Елишаков (Бока-Ратон, США), Г. Е. Карнаух (Черноголовка), Х. Корреа (Мадрид), Б. Н. Кукушкин (Москва), В. А. Никаноров (Москва), А. Малька (Мадрид), А. Ф. Панкин (Москва), С. Н. Федин (Москва), Л. А. Штейнгарц (Иерусалим).

В пятом издании исправлены замеченные погрешности. Во все раздели добавлены новые материалы.

Примечательно, что сфера «Вселенная π » постоянно расширяется. Появляются не только новые сайты, посвященные π (что неудивительно), но и научные результаты, тесно связанные с этим числом (неожиданность для тех, кто считает, что науке уже все известно).

Число π — река, которая катила воды свои еще до того, как мы родились и пришли на ее берег. Налюбовавшись, мы уйдем с берега, а вода в реке будет уплывать все так же, ибо земных пределов у нее нет.

Прекрасно, что число π продолжает оставаться привлекательной загадкой.

Вездесущей?

Александр Жуков
2010–2011

Введение

Пи-пи-пи-и-и, — пела скрипка, и Ежик
даже прикрыл глаза — так ему было хорошо
и печально.

Сергей Козлов
«Весенняя сказка»

Среди бесконечного разнообразия чисел число π пользуется особой славой. О нем пишут стихи, о нем сочиняют афоризмы, его изображают на полотнах и — о, веяние времени! — сегодня во всемирной компьютерной сети Интернет ему посвящают сайты (см. главу «Такое разное π »).

А что же сами математики? Не уподобляются ли они известному сапожнику, который ходит без сапог? Нет, в последнее время число π стало привлекать и их (см. главу «Краткая „биография“ числа π »).

Принимаясь за написание этой книги, автор поставил перед собой сложнейшую задачу. С одной стороны, о числе π сейчас осведомлены, по крайней мере, уже шестиклассники. С другой стороны, любая маломальская попытка разобраться с каким-либо свойством или даже с самим понятием числа π неизбежно выводит за пределы школьного курса математики. На огромные трудности в постижении числа π ссылаются и специалисты-математики — профессионалы, работающие в области теории чисел.

Постижение числа π можно сравнить с процессом бесконечного приближения к пределу. С каждым новым шагом мы все ближе и ближе к заветной цели, однако вожденный предел по-прежнему продолжает оставаться от нас на расстоянии бесконечного количества шагов.

Или — более романтично — число π можно сравнить с кустом великолепных роз: слегка колышущимся на ветру, с прозрачными капельками от только что прошедшего дождя на чудесных лепестках — он находится рядом, его хорошо видно, но приблизиться к нему вплотную, чтобы в полной мере ощутить и осязать все прелести аромата и мягкого шелеста его, невозможно, поскольку располагается он на другом краю пропасти.

Литература

Все это промелькнуло в расширенных от чисел глазах.

Владимир Казаков
«Мои встречи с Владимиром Казаковым»

Обширная подборка оригинальных материалов, связанных с числом π , начиная с папируса Гинда и кончая современными публикациями, приведена в фундаментальной хрестоматии:

Pi-SB. Pi, a source book / [edited by] Lennart Berggren, Jonathan Borwein, Peter Borwein. 3rd ed. New York: LLC.; Springer-Verlag, 2004. 798 p.

Литература к главе *Краткая «биография» числа π*

- Арх. *Архимед*. Сочинения. Перевод, вступит. статья и комментарии. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962. 584 с.
- Ахо. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1986. 476 с.
- Бел. *Белозеров С. Е.* Пять знаменитых задач древности. История и современная теория. Изд-во Ростовского ун-та, 1975. 320 с.
- Бер. *Березкина Э. И.* Математика Древнего Китая. М.: Наука, 1980. 312 с.
- Бол. *Болл У., Коксетер Г.* Математические эссе и развлечения. М.: Мир, 1986. 476 с.
- Бор. *Борвейн Джонатан М., Борвейн Питер Б.* Рамануджан и число π // В мире науки. 1988. № 4. С. 58–66.
- БТ. *Белов А., Тихомиров В.* Сложность алгоритмов // Квант. 1999. № 2. С. 8–11.
- Бух. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. М.: Просвещение, 1966, 384 с.
- Вав. *Вавилов В. В.* Об одной формуле Христиана Гюйгенса // Квант. 1985. 11. С. 9–14.
- Вай. *Вайман А. А.* Шумеро-вавилонская математика. М.: Изд-во восточной литературы, 1961. 280 с.
- Вит. *Витрувий.* Десять книг по архитектуре / Пер. с лат. Ф. А. Петровского. М.: КомКнига/URSS, 2011. С. 188–189.
- Гар. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971. 512 с. («Трансцендентное число π » — с. 418–428).
- Гин. *Гиндикин С. Г.* Загадка Рамануджана // Квант. 1987. № 10. С. 14–20.
- Гле. *Глейзер Г. К.* История числа π : сенсационная гипотеза / Газета «Математика» (приложение к «1 сентября»), 1997. № 8. С. 4–5.
- Гор. *Горбачев Б. С.* Мировые константы π и e в Природе // Земля и Вселенная. 2003. № 5. С. 69–76.

- Дав. *Даван-Дальмедико А. Пейффер Ж.* Пути и лабиринты. М.: Мир, 1996, 432 с.
- Зво. *Звонок А.* Что такое π ? // Квант. 1978. № 11. С. 28–31.
- Изб. Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly». М.: Мир, 1977. 600 с.
- Кле. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. М.: Наука, 1987. Т. 1. С. 343–352.
- Курош. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1977. 432 с.
- Кым. *Кыман Ф.* История числа π . М.: Наука, 1971. 216 с.
- Лев. *Левин В. И.* Рамануджан — математический гений Индии. М.: Знание, 1968. 48 с.
- Ней. *Нейгебауер О.* Точные науки в древности. М.: URSS, 2011. 240 с.
- Пет. *Петров В. А.* Кое-что о π -позии // Математика для школьников. 2009. 4. С. 15, 48.
- Пра. *Прасолов В. В.* Геометрические задачи древнего мира. М.: Фазис, 1997. 226 с.
- Руд. О квадратуре круга. С приложением теории вопроса, составленной Ф. Рудио. Пер. с нем. под ред. и с прим. акад. С. Н. Бернштейна. М.; Л.: Гос. технико-теоретич. изд-во, 1934. 236 с.

Эта книга стала библиографической редкостью. В 2010 г. вышло ее 3-е стереотипное издание: Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт, О квадратуре круга. М.: URSS, 2010, 160 с. В этой книге собраны первоисточники:

- Архимед, «Измерение круга»;
Христиан Гюйгенс, «О найденной величине круга»;
Иоганн-Тенрих Ламберт «Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга»;
Адриан-Мария Лежандр, «Доказательство того, что отношение окружности к диаметру и его квадрат суть иррациональные числа».
- Сор. *Сорокин Г.* Вычислим число e // Квант. 1979. № 8. С. 8.
- Сте. *Степанов С. А.* Нормальное число / Математическая Энциклопедия. Изд-во «Советская энциклопедия». М.: 1982. Т. 3. С. 1070–1071.
- Усп. *Успенский В. А.* Апология математики. СПб.: Амфора, 2009. 554 с.
- Фед. Математики тоже шутят / Автор-сост. А. Н. Федин. Изд. 3-е. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010. 216 с.
- Фих. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. М.: Наука, 1969.
- Хар. *Харди Г.* Двенадцать лекций о Рамануджане. М.: Институт Компьютерных Исследований, 2002. 336 с.
- Хин. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: URSS, 2004. 112 с.
- Хре. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1976. 320 с.
- Шев. *Шевелев В. С.* Три формулы Рамануджана // Квант. 1988. № 6. С. 52–55.
- Шус. *Шустер В.* Математические вечера (веселая математика) / Пер. с нем. В. А. Вейншток. СПб.: Изд. «Вестника Знания» (В. В. Битнера), 1908. 58 с.
- Энд. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.
- Юш1. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961. С. 300–305.
- Юш2. *Юшкевич А. П.* Леонард Эйлер о квадратуре круга. Историко-математические исследования. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1957. С. 159–210.

- BBB. Borwein J. M., Borwein P. B., Bailey D. H. Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to π or How to Compute One Billion Digits of π // American Mathematical Monthly. 1989. Vol. 96. № 3. March. P. 201–219 ([PI-SB], 623–641).
- Bel. Fabrice Bellard, A new formula to compute the n 'th binary digit of π . /bellard.org/pi/pi_bin/pi_bin.html.
- Bel-r. http://bellard.org/pi/pi2700e9.
- Bor. Borwein J. M., Borwein P. B. π and the AGM. A Study in analytic Number Theory and Computational Complexity. John Wiley & Sons, NY Inc., 1987, 414 p.
- BPB. Bailey D. H., Borwein P. and Plouffe S. On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants // Math. Comput. 1997. 66. 903–913 ([PI-SB], 663–676).
- Brent. Brent R. P. Fast Multiple-Precision Evaluation of Elementary Functions // Journal of the Association for Computing Machinery. 1976. Vol. 23. № 2. April. P. 242–251 ([PI-SB], 424–433).
- Brent I. Brent R. P. Multiple-Precision Zero-Finding Methods and the Complexity of Elementary Function Evaluation. http://arxiv.org/abs/1004.3412.
- Chu. Chudnovsky D. V. and Chudnovsky G. V. Approximations and complex multiplication according to Ramanujan, in Ramanujan Revisited, Boston: Academic Press Inc., 1988. P. 375–396, 468–472 ([PI-SB], p. 596–622).
- Dai. http://www.hpcs.is.tsukuba.ac.jp/~daisuke/pi.html.
- DW-DT. http://www.examiner.com/x-10430-Japan-Travel-Examiner~y2010m1d25-Interview-with-the-Japanese-researcher-who-found-25-Trillion-digits-of- π .
- Eis. Eisenlor A. Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum). Leipzig, 1877, 1891.
- Gal. Gregory Galperin. Billiard Balls count π // MASS Selecta, American Mathematical Society. October, 1998, p. 197–204.
- Ger. Paulus Gerdes. Three Alternate Methods of Obtaining the Ancient Egyptian Formula for the Area of a Circle // Historia Mathematica. 1985. 12. P. 261–268.
- Gup. Gupta R. C. On the remainder term in the Madhava-Leibniz's series // Ganita Bharati. 1992. 14 (1–4). P. 68–71. См. также K. Mukunda Marar and C. T. Rajagopal. On the Hindu Quadrature of the Circle — [PI-SB], p. 77–82.
- Kaz. Kazuo Muroi. Reexamination of Susa Mathematical Text No. 3: Alleged Value $\pi = 31/8$ // Historia Scientiarum. 1992. V. 2-1. P. 45–49.
- Lan. Lange L. J. An Elegant Continued Fraction for π // The American Mathematical Monthly. 1999. May. 106 (5): 456–458.
- Mun. Matiyahu Hacohen Munk. Three Geometric Problems in the Bible and the Talmud // Sinai. 1962. 51. 218–227.
- PG. Alfred S. Posamentier and Noam Gordan. An Astounding revelation on the History of π // Mathematics Teacher. 1984. January. P. 52, 47.
- PIR. www.lupi.ch/PiSites/Pi-Rekord.html.
- Sal. Salamin E. Computation of using arithmetic-geometric mean // Mathematics of Computation. 1976. 30. P. 565–570 ([PI-SB], p. 418–423).

Литература к главе На просторах геометрии

- Алс. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
- Бол1. Болтянский В. Г. Доказательства теорем Польдена // Квант. 1973. № 6. С. 9–13.
- Бол2. Болтянский В. Г. Равноставленность многоугольников и многогранников // Энциклопедия элементарной математики. Кн. 5. Геометрия. М.: Наука, 1966. С. 142–180.
- Гин. Линдикин С. Волшебный мир Анри Пуанкаре // Квант. 1976. № 3. С. 9–17.
- Дуб. Дубровский В. Площадь поверхности по Минковскому // Квант. 1979. № 4. С. 33–36.
- Кру. Крутский В. Н., Орлов А. И. Коза на привязи // Квант. 1974. № 5. С. 74–75.
- Дю. Дюдени Г. Э. Кентерберийские головоломки. М.: Мир, 1979. С. 46–47.
- Пра. Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989. 288 с.
- Роз1. Розенфельд Б. А., Яглом И. М. Многомерные пространства / Энциклопедия элементарной математики. Т. 5. Геометрия. М.: Наука, 1966. С. 349–392.
- Роз2. Розенфельд Б. А., Яглом И. М. Неевклидовы геометрии / Энциклопедия элементарной математики. Т. 5. Геометрия. М.: Наука, 1966. С. 393–475.
- Сил. Силин А. В., Шамова Н. А. Открываем неевклидову геометрию. М.: Просвещение, 1988. 128 с.
- Фих. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. М.: Наука, 1969.
- Хад. Хаддизер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966. 416 с.
- Шир. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2009. 80 с.
- Шкл. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1974, 384 с.
- Ште. Штейнгауз Г. Задачи и размышления. М.: Мир, 1974. 400 с.
- Эпп. Эппель Б. С. Задачи о телах вращения и теоремы Польдена // Квант. 1973. № 6. С. 4–8.
- Ягл. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. Гостехиздат, 1951.
- Ман. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. New York, Freeman, 1982. (Русский перевод: Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.)

Литература к главе В мире чисел

- Ани. Лаборатория. Проспект выставки художественных работ Ирины Анищенко. М.: 2009.
- Арн. Арнольд В. И. Пойгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989. 96 с.
- Баа. Баабов А. «Пентиум» хорошо, а ум лучше // Квант. 1999. № 5. С. 38–40.
- Бен. Бендудикзе А. Д. Золотое сечение // Квант. 1973. № 8. С. 22–27.
- Бол. Болтянский В. Г. программы перебора // Квант. 1988. № 1. С. 3–7, 34.
- Болъ. Болбот А. Д. Байки от Болбота. mmf1.nsu.ru/mmf1/persons/bolbot/baiki.htm.

- Ваг. Вагутен В. Н. Близкие дроби // Квант. 1975. № 8. С. 33–39.
- Вар. Варпаховский Ф. Л., Колмогоров А. Н. О решении десятой проблемы Гильберта // Квант. 1970. № 7. С. 39–44.
- Вас. Васютинский Н. Золотая пропорция. М.: Молодая гвардия, 1990. 240 с.
- Виг. Вигнер Е. Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии. М.: URSS, 2002. 320 с.
- Вил. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975. 208 с.
- Вор. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1992. 192 с.
- Газ. Газале М. Пномон. От фракталов до фракталов. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 272 с.
- Гар. Гарднер М. Крестики-нолики. М.: Мир, 1988. 352 с.
- Гика. Гика М. Эстетика пропорции в природе и искусстве. М.: Изд-во Всесоюзной академии архитектуры, 1936. 312 с.
- Гил. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: URSS, 2010. 344 с.
- Гму. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2000. 398 с.
- Гне. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1965. 400 с. Изд. 10-е. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2011. 320 с.
- Гор. Горбачев Б. С. Мировые константы и числа π и e в Природе // Земля и Вселенная. 2003. 5. С. 69–76.
- Гур. Гуртман Г. Н. Геометрия счастливых билетов // Квант. 1988. № 4. С. 72.
- Зай. Зайдиль А. Н. Обман или заблуждение? // Квант. 1983. № 5. С. 24–28.
- Инт. Интегралом — по счастливым билетам! // Квант. 1978. № 11. С. 52–53.
- Изб. Избранные задачи (из журнала «American Mathematical Monthly»). М.: Мир, 1977. 600 с.
- Кор. Коробко В. И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1998. 376 с.
- Кре. Крейн М., Нудельман А. Замечательные пределы, порожденные классическими средними // Квант. 1981. № 9. С. 13–15.
- Кур. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. М.: Просвещение, 1967. 560 с.
- Кым. Кымпан Ф. История числа π . М.: Наука, 1971. 216 с.
- Мал. Малов Н. Задача Дирака // Квант. 1981. № 9. С. 40.
- Ник. Николаев Е. Г. Равноправны ли все цифры? // Квант. 1975. № 11. С. 16–20.
- Пой. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010. 464 с.
- Про. Прохоров А. И. Золотая спираль // Квант. 1984. № 9. С. 15–17, 33.
- Пру. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. М.: Наука, 1981. 800 с.
- Сав. Савин А. П., Финк А. М. Разговор в трамвае // Квант. № 7. 1975. С. 67–70.
- Сан. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983. 360 с.
- Сно. Снова о счастливых билетах // Квант. 1989. № 8. С. 42.
- Ста. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. 151 с.
- Фед. Математики тоже шутят / Автор-сост. С. Н. Федин. Изд. 3-е. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010. 216 с.

- Фел. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010. Т. 1—528 с.; Т. 2—752 с.
- Физ. Физики продолжают шутить. М.: Мир, 1968. Изд. 6-е. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2011. 320 с.
- Фин. Финк Л. Еще раз о счастливых билетах // Квант. 1976. № 12. С. 68–70.
- Фих. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. М.: Наука, 1969.
- Хар. Харди Г. Х. Курс чистой математики. М.: КомКнига/URSS, 2011. 512 с.
- Хэм. Хэмбидж Д. Динамическая симметрия в архитектуре. М.: Изд-во Всесоюзной академии архитектуры, 1936. 204 с.
- Чер. Чернов А. Серебряное сечение // Новая газета. 13.01.97. № 2 (422). С. 8–9.
- Шев. Шевелев И. Ш., Марутаев М. А., Шмелев И. П. Золотое сечение. М.: Стройиздат, 1990. 344 с.
- Ште. Штейнгарц А. Л. Из чего угодно — что угодно // Квант. 1987. № 8. С. 53–54.
- Шкл. Шклярский Д. О., Ценцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и Алгебра. М.: Наука, 1976. С. 67.
- Эйл. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. Т. 1. М.; Л.: Объединен. научно-технич. изд-во НКТП СССР, 1936. 352 с.
- Act. Acta Arithmetica, 1998, 85, p. 301–307.
- BBB-1. Baillie R., Borwein D., Borwein J. M. Surprising Sinc Sums and Integrals // American Mathematical Monthly. 2008. November 10, December. V. 115. P. 888–901 (14) (см. также www.cs.dal.ca/~jborwein/sinc-sums.pdf).
- Beeler. Beeler M. et al. Item 140 in Beeler M., Gosper R. W. and Schroepfer R. Cambridge, MA: MIT Artificial Intelligence Laboratory, Memo AIM-239. Feb. 1972. P. 69.
- Bor. Borwein J. M., Borwein P. B. Pi and the AGM. A Study in analytic Number Theory and Computational Complexity. John Wiley & Sons, NY Inc., 1987. 414 p.
- GH. www.goldenmuseum.com.
- Hah1. Harry K. Hahn. The Distribution of Prime Numbers on the Square Root Spiral. <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0801/0801.1441.pdf>.
- Hah2. Harry K. Hahn, Kay Shoenberger. The Ordered Distribution of Natural Numbers on the Square Root Spiral. <http://arxiv.org/pdf/0712.2184v1.pdf>.
- Mic. Michael D. Huberty Ko Hayashi & Chia Vang. Pi & Fibonacci Numbers www.geom.umn.edu/~huberty/math5337/groupe/fibonacci.html, 1996–1997.
- Plo. Simon Plouffe. Identities inspired by Ramanujan's Notebooks (part 2). www.lacim.ugam.ca/~plouffe/inspired2.pdf.
- Ren. Renyi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1957. 8. P. 477–493.
- Sac. Robert Sacks. www.numberspiral.com.
- Son. Sondow J. Problem 88 // Math Horizons. Sept. 1997. P. 32, 34.

Литература к главе Число π и наука о природе

- Вар. Варламов А., Шапиро А. В голубом просторе // Квант. 1982. № 3. С. 10–15.
- Вей. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
- Вла. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В. С. Валадимирова. М.: Наука, 1974. 272 с.

- Гал. Гальперин Г. А. Биллиардная динамическая система для числа π / Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 5. 2001. С. 137–138 (эту статью можно также найти на сайте <http://nature.web.ru>).
- Гам. Гамов Г. Приключения мистера Томпкинса. В трех книгах. М.: URSS, 2003.
- Кот. Котляр Б. Д. Удивительное равенство // Квант. 1989. № 7. с. 17–21.
- Мак. Маковский П. В. Смотри в корень! М.: Наука, 1979. 384 с.
- Нов. Новинский Г., Хомазюк В. Закон Архимеда и... решение уравнений // Квант. 1977. № 5. С. 17–19.
- Фей. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Том 3, Излучение. Волны. Кванты. М.: Мир, 1967. С. 113. Изд. 6-е. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010.
- Физ. Физики продолжают шутить. М.: Мир, 1968. Изд. 6-е. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2011. 320 с.
- Хим. Химия и жизнь. 1984. № 5. 4-я страница обложки.
- Шер. Шермергорн И. М. Природа и числа // Химия и жизнь. 1985. № 1. С. 87.
- Яво. Яворский Б. М., Демлаф А. А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. М.: Наука, 1974. С. 330.
- Янг. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. С. 244.
- Gal. Gregory Galperin. Billiard Balls count π // MASS Selecta, American Mathematical Society, Oktober 1998, p. 197–204.

Литература к главе Такое разное π

- Анн. Анисов С., Туляков Д. XXIII Всесоюзная олимпиада по математике // Квант. 1989. № 11. С. 67.
- Бах. Бахтияров К. И. Окно в параллельные миры трансцендентных объектов // Информатика и образование. 2000. № 10. С. 19–25.
- Бек. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.
- Бес. Бестер А. Пи-человек / Мастера американской фантастики. Бук Чембер Интернешнл, 1991. С. 144–157.
- Бол. Болтянский В. Г. Часто ли степени двойки начинаются с единицы? // Квант. 1978. № 5. С. 5.
- Больш. Большот А. Д. Байки от Большота. mmfd.nsu.ru/mmfd/persons/bolbot/baiki.htm.
- Большая. Большая Я. Appendix. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 236 с.
- БФО. Бонч-Осмоловская Т. Б., Федин С. Н., Орлов С. А. Занимательная риторика Раймона Кено. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. 256 с.
- Гал. Гальперин Г. А., Дубровский В. Н., Произволов В. В. задача M 1020 // Квант. 1987. № 4. С. 27.
- Гор. Горобец Б. С. Мировые константы π и e в Природе // Земля и Вселенная. 2003. № 5. С. 69–76.
- Дав. Давыдов В. А. Как индейцы бросают томагавк? // Квант. 1989. № 11. С. 19–22.
- Его. Егоров А. А. Решетки и правильные многоугольники // Квант. 1974. № 12. С. 30–32.
- Изб. Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly». М.: Мир, 1977. С. 114.

- Ион. Ионин Ю., Плоткин А. Среднее значение функции // Квант. 1977. № 7. С. 30–31.
- КС. Карнаух Г. Е., Сосиков А. И. «Лоскуты» эффективного взаимодействия в многоимпульсных ЯМР экспериментах с кристаллографитами / Радиоспектроскопия. Пермь: Пермский университет, 1985. С. 25–30.
- Куп. Купцов Л. П. Новые приближения числа π // Квант. 1989. № 6. С. 29.
- Пер. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. Домодедово: Изд-во ВАП, 1994. 288 с.
- Пой. Пойа Д. Математическое открытие. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010. С. 14.
- Скл. Скляревский Е. Пилюли для Пигмалиона и воздушная кукуруза // Hard'n Soft. 2003. № 4. С. 114–119.
- Сой. Соер У. У. Прелюдия к математике. М.: Просвещение, 1972. 192 с.
- Фед. Математики тоже шутят / Автор-сост. А. Н. Федин. Изд. 3-е. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010. 216 с.
- Фук. Фукс Д. Лента Мебиуса. Вариации на старую тему // Квант. 1979. № 1. С. 2–9.
- Хар. Харди Г. Курс чистой математики. М.: КомКнига/URSS, 2011. С. 154.
- Чер. Чернов А. Серебряное сечение / Новая газета. 13.01.1997. № 2 (422). с. 8–9.
- Ште. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1981. С. 104.
- H-HS. Hans-Henric Stolum (1999–03-22). River Meandering as a Self-Organization Process. Science. 271 (5256): 1710–1713.
- Hun. Hunter I. M. L. An exceptional talent for calculative thinking // British Journal of Psychology. 1962. 53 (3). P. 243–258.
- Wei. Eric W. Weisstein, Pi Formulas / [mathworld.wolfram.com / PiFormulas.html](http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html).