АРХИВ НОМЕРОВ Кванта
О проекте

Научно-популярный
физико-математический журнал
"Квант"
(издается с января 1970 года)

МЦНМО
Редакция журнала "Квант"

Холидей Д., **Ошеломляющее впечатление.**

ОШЕЛОМЛЯЮЩЕЕ ВПЕЧАТЛЕНИЕ

Д. ХОЛИДЕИ

Для решения некоторых физических задач требуются вычисления высочайшей точности. Однако решение многих других задач может быть и приближенным. Физики гордятся тем, что могут быстро отвечать на вопросы, требующие ответа «с точностью до порядка», делая приближенные оценки, основанные на здравом смысле. Вот типичный пример:

Сколько атомов резины стирается с шины автомобильного колеса при каждом его обороте?

Задачи такого рода обычно называют задачами Ферми — по имени великого физика Энрико Ферми, который обладал величайшим искусством не только ставить подобные задачи, но и быстро и изящно решать их.

Без сомнения, у вас уже возникло несколько вопросов.

Да, конечно. Прежде всего — имеет ли данная задача какое-либо практическое значение?

Возможно, и не имеет, однако в постановке задачи просматривается любопытная связь между миром бесконечно малых (атомов) и макромиром (автомобилем). А фактически цель этой задачи — помочь вам понять, как следует делать оценки.

В формулировке этой задачи нет цифровых данных. С чего же начать?

Мы должны сами задать исходные данные — радиус покрышки, суммарную массу резины и т. д.

Но это вымышленные данные. Как же при этом мы сможем получить точный ответ?

Если под словом «точный» понимать ответ, получивший положительную оценку при обычной экспертизе, то вы правы. Но в задачах такого рода под «точностью» понимают «точность до какого-то порядка», и, задавая исходные данные для подобных задач, сильно ошибиться достаточно трудно.

Понятно. С чего же мы начнем?

С составления плана решения задачи — мы определим объем резины, которая стирается с шины, а затем разделим его на объем атома. Это и будет искомый результат. Сначала займемся резиной.

Статья заимствована из русско-американского журнала «Quantum». Автор статьи, написанной в форме диалога с читателем, — заслуженный профессор физики в отставке Питсбургского университета. Перевела с английского И. Вахурина.

Согласен. И все же я не представляю, как определить объем резины, которая стирается с шины при каждом обороте колеса.

Его можно узнать, определив объем резины, которая была стерта с шины за все время ее эксплуатации, и число оборотов колеса за это время. Разделив одно на другое, мы найдем объем резины, стираемой за один оборот колеса.

Пусть R — внешний радиус шины, d — ее ширина, h — глубина стирания резины и L — расстояние, которое прошло колесо за все время его эксплуатации. Число оборотов колеса N равно расстоянию, которое прошло колесо, деленному на длину окружности обода шины:

$$N = \frac{L}{2\pi R}.$$

Объем всей резины V есть объем цилиндра толщиной h:

$$V = 2\pi R d h.$$

Тогда объем резины, стираемой с шины при одном обороте колеса, равен

$$V_0 = \frac{V}{N} = \frac{2\pi R d h}{L/(2\pi R)} = \frac{40 R^2 d h}{L}.$$

Отметим, что мы заменили π^2 на 10, что вполне допустимо, если учесть цели, которые мы преследуем.

Но ведь нет никакой необходимости заменять π^2 на 10. Мой калькулятор показывает 9.87.

Вам кажется, что если вы не сделаете такой замены, ответ будет более точным? Наверное. Однако наши последующие вычисления будут настолько приблизительными, что такой потерей точности можно свободно пренебречь. Кроме того, с числом 10 гораздо приятнее иметь дело.

Хорошо, допустим. Что дальше?

Мы уже достигли большого прогресса, сведя решение задачи к оперированию с величинами, которые можем определить. Скоро мы это сделаем. А пока давайте немного поразмышляем об атомах.

Мне все время не давал покоя вопрос, что такое «атом резины»? Я думаю, мы не найдем такого элемента в периодической таблице.

Вы, конечно, правы. Резина состоит из молекул, которые представляют собой длинные цепочки атомов водорода, углерода и кислорода. Однако в данной задаче нас интересуют некие абстрактные атомы, радиус которых мы обозначим r.

Понятно. Значит, объем $V_а$ такого абстрактного атома есть объем сферы радиусом r, т. е. $V_а=(4\pi/3)r^3$. Правильно?

Можно сказать и так. Однако лучше (и проще) положить $V_а=(2r)^3$. Такое допущение означает, что мы считаем атомы крохотными кубиками, а это дает возможность учесть и межатомные расстояния.

Итак, чтобы получить ответ, нам осталось разделить одну уже известную величину на другую. Правильно?

Правильно. Количество атомов резины, которые стираются с шины за один оборот колеса, равно

$$n = \frac{V_0}{V_а} = \frac{40 R^2 d h}{L(2r)^3} = \frac{5 R^2 d h}{L r^3}.$$

Теперь мы готовы к вычислениям.

Пусть $R=1$ фут≈ 30 см$=3/10$ м, $d=4$ дюйма≈ 10 см$=1/10$ м, $h=1/6$ дюйма≈ 4 мм$=4/1000$ м, $L=50000$ миль$=8\cdot 10^7$ м, $r=10^{-10}$ м*). Подставляя эти значения в полученное выражение для n, мы должны помнить, что все члены нужно выразить в одних и тех же единицах, например в метрах. Тогда мы получим

$$n = \frac{5\cdot 3\cdot 3\cdot 4}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 1000\cdot 8\cdot 10^7\cdot 10^{-30}}.$$

Хотите, я посчитаю это выражение на моем калькуляторе?

Нет. Обойтись без калькулятора при решении задачи Ферми — это дело чести. Давайте перепишем полученное выражение, собрав вместе все целые числа и все степени 10:

$$n = \left(\frac{5\cdot 3\cdot 3\cdot 4}{8}\right)10^{17}.$$

*) Физики обычно считают радиус атома равным именно 10^{-10} м. Полезно запомнить это число. (Между прочим, радиус ядра атома обычно полагают равным 10^{-15} м.) (*Прим. ред.*)

Легко заметить, что выражение в скобках примерно равно 20. Таким образом, количество атомов резины, стираемых с шины за один оборот колеса, равно $n=2\cdot 10^{18}$.

Не следует ли отбросить двойку и округлить это число до 10^{18}?

Да, конечно. Отсутствие двойки не повлияет на точность нашей оценки.

Итак, если кто-то на вечеринке задаст вам «вопрос о колесе» (а поверьте мне, кто-нибудь да сделает это!), вы можете глубокомысленно посмотреть в потолок и через пару минут произнести: «Примерно... 10^{18} атомов за один оборот». Именно так отвечал на подобные вопросы сам Ферми.

Предлагаю вам поупражняться и решить еще две задачи Ферми:

1. В 1980 году население города Бостона составляло 560 000 человек. Сколько школьных учителей было в городе в том году?

2. Сколько галлонов бензина ежегодно сжигают все частные автомашины в США?

Большой или маленький?

Как вы считаете, 10^{18} атомов, стирающихся с шины при каждом обороте колеса, это много или мало? Ответить на этот вопрос не удастся до тех пор, пока вы не ответите на другой вопрос: «Много или мало по отношению к чему?» Если рассматривать 10^{18} просто как число — это, конечно, много. Например, оно в 10 000 000 раз больше, чем число звезд в Млечном Пути.

Однако у нас речь идет не просто о числе 10^{18}, а о числе атомов. А это примерно в 10 000 000 раз меньше, чем количество атомов в стакане воды.

Конкурс «Математика 6—8»

Мы начинаем третий конкурс по решению задач «Математика 6—8». Результаты предыдущего конкурса будут опубликованы в следующем номере журнала.

Условия конкурса: в нем могут участвовать учащиеся 6—8 классов, которым будут предложены 24 задачи, по 3 в каждом номере журнала. Победители будут награждены призами и дипломами.

Решения задач этого номера высылайте до 1 декабря 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, 1-я Тверская-Ямская ул., 2/1, «Квант», с пометкой: «Конкурс «Математика 6—8». Не забудьте указать фамилию, имя, школу, класс и домашний адрес.

Задачи

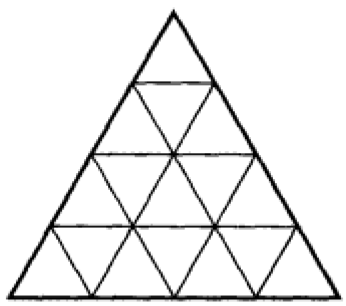
1. Если вечером на Поле Чудес закопать золотые монеты, то к утру на их месте вырастут одинаковые деревья с золотыми монетами на ветвях. Буратино пришел на Поле Чудес в понедельник, имея 5 золотых монет. Он хочет получить не меньше 1992 монет. Вырастив первые деревья, он понял, что сможет добиться своего не раньше среды, но не позже пятницы. Сумеет ли он оказаться владельцем ровно 1992 монет?

И. Акулич

2. Целые числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ca=0$. Докажите, что число abc может быть представлено в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.

В. Произволов

3. Правильный треугольник со стороной длины n разбит на единичные правильные треугольники (см. рисунок). Сколько существует различных равносторонних треугольников, вершины которых являются вершинами этих единичных треугольников? (Заметим, что при $n=1$ это число равно 1, при $n=2$ оно равно 5, а при $n=3$ равно 15.)



Н. Авилов